

# Le théorème du point fixe de Brouwer

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , fixé dans tout le problème.  $\mathbb{R}^n$  est munit de sa structure euclidienne canonique, de norme euclidienne notée  $\|\cdot\|$ . On définit la sphère unité et les boules unités fermées et ouvertes de  $\mathbb{R}^n$ , notées respectivement  $\mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\mathbb{B}^n$  et  $\mathbb{B}_o^n$  par :

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

$$\mathbb{B}_o^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$$

L'objectif de ce problème est de montrer le théorème du point fixe de Brouwer, qui s'énonce en ces termes : toute application continue  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  a un point fixe.

Pour le démontrer, on raisonne par l'absurde. On suppose donc par l'absurde l'existence d'une application continue  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  sans point fixe, fixée dans toute la suite.

## 1 Construction d'une rétraction lisse sur $\mathbb{S}^{n-1}$

1. Montrer l'existence de  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{B}^n$ , on ait  $\|f(x) - x\| \geq \epsilon$ .

2. Montrer l'existence d'une fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert  $\Omega$  contenant  $\mathbb{B}^n$ , vérifiant  $g(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{B}_o^n$ , et telle que pour tout  $x \in \mathbb{B}^n$ , on ait  $\|f(x) - g(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ .

*Indication :* On pourra utiliser habilement le théorème de Stone-Weierstrass sur l'algèbre des polynômes à  $n$  variables.

3.a) Conclure qu'on peut supposer que la fonction  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert  $\Omega$  contenant  $\mathbb{B}^n$ , et que  $f(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{B}_o^n$ , sans nuire à la généralité du problème. On fera ces hypothèses dans toute la suite.

b) Montrer que, quitte à réduire l'ouvert  $\Omega$ , on peut même supposer que  $f$  n'a pas de point fixe sur l'ouvert  $\Omega$ , et que  $f(\Omega) \subset \mathbb{B}_o^n$ , tout en conservant la condition  $\mathbb{B}^n \subset \Omega$ . On fait ces hypothèses dans la suite.

4. a) Soit  $x \in \Omega$ . Montrer l'existence d'un unique point d'intersection de la demi-droite  $[f(x), x)$  avec la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Le calculer en fonction de  $f(x)$  et  $x$ .

b) Montrer l'existence d'une fonction  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega$ , et qui fixe tous les points de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . On dira que  $\varphi$  est une "rétraction lisse" de  $\Omega$  sur  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

## 2 La conclusion

On dispose d'après la partie précéedente d'un ouvert  $\Omega$  contenant  $\mathbb{B}^n$  et d'une rétraction lisse de  $\Omega$  sur  $\mathbb{S}^{n-1}$ , qu'on note  $\varphi$ . On va montrer que l'existence d'une telle rétraction mène à une contradiction.

Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on pose :

$$\begin{aligned}\varphi_t : \mathbb{B}^n &\rightarrow \mathbb{B}^n \\ x &\mapsto (1-t)x + t\varphi(x)\end{aligned}$$

et :

$$P(t) = \int_{\mathbb{B}_o^n} \det(d\varphi_t(x)) dx$$

5. a) Justifier l'existence de l'intégrale  $P(t)$  pour  $t \in [0, 1]$ .

b) Vérifier que  $P$  est une fonction polynomiale de  $t$ .

6. a) Soit  $x \in \mathbb{B}_o^n$ . Montrer que  $\text{Im}(d\varphi_x) \subset \varphi(x)^\perp$ .

b) En déduire  $P(1) = 0$ .

7. a) Montrer l'existence de  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que pour tout  $t \in [0, \alpha]$ ,  $\varphi_t$  restreinte à  $\mathbb{B}^n$  soit injective.

8. a) Montrer l'existence de  $m \in \mathbb{N}^*$  et de fonctions continues  $a_1, \dots, a_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \Omega, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \det(d\varphi_t(x)) = 1 + \sum_{i=1}^m a_i(x)t^i$$

b) En déduire que quitte à réduire  $\alpha$ , on peut supposer que pour tout  $t \in [0, \alpha]$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{B}^n, \quad \det(d\varphi_t(x)) \neq 0.$$

9. a) Montrer, en utilisant le théorème d'inversion globale, que pour tout  $t \in [0, \alpha]$ ,  $\varphi_t$  induit un difféomorphisme de  $\mathbb{B}_o^n$  sur un ouvert  $\varphi_t(\mathbb{B}_o^n)$  de  $\Omega$ .

b) Vérifier de plus que  $\det(\varphi_t(x)) > 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $x \in \mathbb{B}_o^n$ .

10. Soit maintenant  $t \in [0, \alpha]$ . On va montrer que  $\varphi_t(\mathbb{B}_o^n) = \mathbb{B}_o^n$ .

a) Vérifier que  $\varphi_t(\mathbb{B}_o^n)$  est un ouvert de  $\mathbb{B}_o^n$ .

b) Montrer que  $\varphi_t(\mathbb{B}_o^n)$  est également un fermé de  $\mathbb{B}_o^n$ .

*Indication :* On pourra remarquer que  $\varphi_t(\mathbb{B}^n)$  est un compact donc un fermé, et que  $\varphi_t$  envoie  $\mathbb{S}^{n-1}$  dans  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

c) Conclure que  $\varphi_t(\mathbb{B}_o^n) = \mathbb{B}_o^n$ .

12. a) Par la formule du changement de variable, en déduire que pour tout  $t \in [0, \alpha]$ , on a :

$$P(t) = P(0) = \int_{\mathbb{B}_o^n} dx$$

b) Conclure.